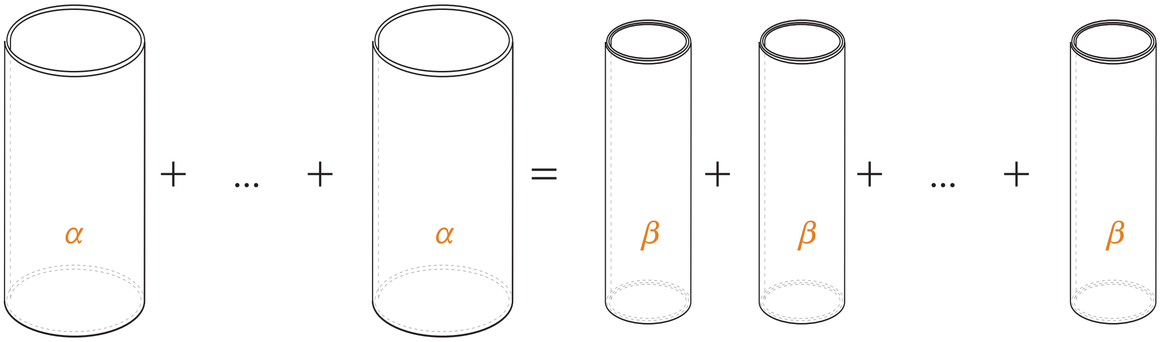
WIELOKROTNA WARSTWA BOCZNA

Walec o objętości α tworzymy w ten sposób, że kartkę tę zwijamy w rulon, wzdłuż dłuższego boku b tak, by kartka ta tworzyła podwójną warstwę powierzchni bocznej walca. Walec o objętości β tworzymy w ten sposób, że kartkę tę zwijamy w rulon, wzdłuż tego samego boku tak, by kartka ta tworzyła potrójną warstwę powierzchni bocznej walca. Udowodnij, że:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta.$$



cztery walce dwuwarstwowe *dziewięć walców trzywarstwowych*

Rozwiązanie

Na początek wprowadźmy oznaczenia potrzebne do rozwiązania zadania. W obydwu przypadkach wysokość walców wynosi b (karta jest zwijana wzdłóż dłuższego boku). Oznaczmy jeszcze promienie podstawy walców jako: R_2 – promień podstawy walca o podwójnej warstwie powierzchni bocznej, R_3 – promień podstawy walca o potrójnej warstwie powierzchni bocznej.

W 18 numerze Świata Matematyki wyznaczyliśmy wzór na obwód koła o promieniu r jako $2\pi \cdot r$. W naszym przypadku suma długości dwóch lub trzech długości okręgów podstawy walców zawsze będzie równa długości a kartki papieru. Możemy w takim razie zapisać:

$$2 \cdot 2\pi \cdot R_2 = a\text{, dla walca dwuwarstwowego}$$

oraz

$$3 \cdot 2\pi \cdot R_3 = a\text{, dla walca trzywarstwowego.}$$

Zatem średnice walców będą wynosiły $R_2 = \frac{a}{4\pi}$ i $R_3 = \frac{a}{6\pi}$.

Obliczmy teraz objętości α i β dla walca dwu- i trzywarstwowego. Wzory na objętość walca były w 18. numerze *Świata Matematyki*:

$$\alpha = \pi(R_2)^2 \cdot b = \pi\left(\frac{a}{4\pi}\right)^2 \cdot b = \pi\frac{a^2}{16\pi^2} \cdot b = \frac{a^2}{16\pi} \cdot b,$$

$$\beta = \pi(R_3)^2 \cdot b = \pi\left(\frac{a}{6\pi}\right)^2 \cdot b = \pi\frac{a^2}{36\pi^2} \cdot b = \frac{a^2}{36\pi} \cdot b.$$

Obliczamy iloraz $\frac{\alpha}{\beta}$:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{\cancel{a^2}}{16\pi} \cdot \cancel{b}}{\frac{\cancel{a^2}}{36\pi} \cdot \cancel{b}} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}.$$

Zatem $4\alpha = 9\beta$, co możemy zapisać:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta.$$